

25/02 [3] $g(x)$ — четная. Тогда: $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$

1) $\int_{-1}^1 g(x) P_m(x) P_n(x) dx = \int_{-1}^1 g(t) P_m(t) P_n(t) dt = \int_{-1}^1 g(-t) P_m(-t) P_n(-t) dt = \int_{-1}^1 g(t) P_m(-t) P_n(-t) dt = 0 \Rightarrow P_m(-t) \perp P_n(-t) \Rightarrow \{P_n(-t)\}$ — ортон.

2) $P_n(-x) = C_n P_n(x)$; ^{по пред. св-ву} верно и д/старшей степени $\Rightarrow (-x)^n = C_n x^n \Rightarrow C_n = (-1)^n$ ■

И (о ^(нулях) корнях ортон. полиномов) Все ^(нули) корни полинома $P_n(x)$ действительны, различны и нах-ся на инт. $(-1, 1)$

▲ If все корни $x_1, \dots, x_n$ полинома $P_n(x)$

различны, $\in (-1, 1)$, то $P_n(x)$ ^{меняет знак и раз на $(-1, 1)$} это не так. $P_n(x)$ меняет знак в т. $\xi_1, \dots, \xi_m$,
 $m < n, \xi_i \in (-1, 1)$

* полином $Q_m(x) = (x - \xi_1)(x - \xi_2) \dots (x - \xi_m)$,
 участки пост. знака совпадают с участками пост.
 знака $P_n(x)$

Тогда: $Q_m(x)P_n(x) \rightarrow$ 1) непрер.;
 2) $= 0$ в $x = \xi_1, \dots, \xi_m$;
 3) $P_n Q_m < 0$ либо > 0
 вне $x = \xi_i$

Тогда $\int_{-1}^1 g(x) Q_m(x) P_n(x) dx \neq 0$ противоре-
 чит тому, что $Q_m(x) \perp P_n(x)$, $m < n$ ■

II.1 Полином Чебышева

* ставим задачу: $y_{n+1} - 2xy_n + y_{n-1} = 0$,
 $n = 1, 2, \dots$ ^{параметр}

$$y_0 = 1, y_1 = x$$

1) Реш-е (рекуррентное): $y_{n+1} = 2xy_n - y_{n-1}$

$$y_0 = 1, y_1 = x, y_2 = 2xy_1 - y_0 = 2x^2 - 1,$$

$$y_3 = 2xy_2 - y_1 = 4x^3 - 3x \Rightarrow$$

$\Rightarrow y_n$ — полином

Утв y_n — реш-е есть полином степени

$n, n=0, 1, 2, \dots$

▲ Базис: $y_0 = 1$

$\exists y_{n-1}, y_n$ — полиномы Q_{n-1}, Q_n

$y_{n+1} = 2x Q_n(x) - Q_{n-1}(x)$ — полином степени $(n+1)$ ■

Сл. коэффициент при старшей степени x^n равен

$$2^{n-1} \Rightarrow y_n = 2^{n-1} x^n + Q_{n-1}(x)$$

2) Общ. реш-е

Хар. ур-ние: $q^2 - 2xq + 1 = 0 \Leftrightarrow q_{1,2} = x \pm \sqrt{x^2 - 1}$

Общ. реш-е: $y_n = C_1 q_1^n + C_2 q_2^n$

! Зам $q_1 = q = x + \sqrt{x^2 - 1}$ — взаимно обратны
сопрот. $\frac{1}{q} = \frac{x^2 - (\sqrt{x^2 - 1})^2}{x(\sqrt{x^2 - 1})} = \frac{1}{x - \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{q_2}$

И.е., if $q = x + \sqrt{x^2 - 1}$: $q_1 = q, q_2 = \frac{1}{q}$
 $\Rightarrow y_n = C_1 q^n + C_2 q^{-n}$

Учтем краев. усл.: $y_0 = 1 = C_1 q_1^0 + C_2 q_2^0 = C_1 + C_2$

$$y_1 = x = C_1 (x + \sqrt{x^2 - 1}) + C_2 (x - \sqrt{x^2 - 1})$$

Решая с-му из двух ур-ний $\Rightarrow C_1 = C_2 = \frac{1}{2}$

Реш-е зад.: $y_n = \frac{1}{2} (q^n + q^{-n}), n=0, 1, 2, \dots$

* ситуацию $|x| < 1$ ($x \in (-1, 1)$)

$$q = x + \sqrt{x^2 - 1} = x + i\sqrt{1 - x^2}$$

$$|q| = x^2 + (1 - x^2) = 1$$

$$q = e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \Rightarrow x = \cos\varphi$$

$$y_n = \frac{1}{2}(e^{i\varphi n} + e^{-i\varphi n}) = \cos\varphi n, \text{ но } \varphi = \arccos x$$

$\Rightarrow y_n = \cos(n \arccos x)$ — реш-е, поли-
ном степени n — полином Чебышева
на $(-1, 1)$

// Напоминание: $\frac{x^{(k+1)} - x^{(k)}}{\tau_{k+1}} + A x^{(k)} = f$, где τ_{k+1} —

— корни полинома Чебышева

$$\| \underbrace{(E - \tau_1 A)}_{1^1} \underbrace{(E - \tau_2 A)}_{1^1} \underbrace{\dots}_{1^1} \| \rightarrow \min_{\tau}$$

Необх. упорядочить корни в методе Чебы-
шева из-за расх-ти (см. книгу (3)) //

П.2 Св-ва полинома Чебышева

$$y_n = \cos(n \arccos x), \quad -1 < x < 1 \quad T_n = y_n$$

(1) If $f \neq g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, то $T_n(x)$ — с-на поли-
номов Чеб. — ортогональна

$$\int_{-1}^1 g(x) T_n(x) T_m(x) dx = \begin{cases} 1 & n=m \\ 0 & n \neq m \end{cases} \quad \text{где } x = \cos\varphi, dx = -\sin\varphi d\varphi$$

$$= - \int_{\pi}^0 \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\varphi}} \cosh\varphi \cos m\varphi \sin\varphi d\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi} \cosh\varphi \sin m\varphi d\varphi = 0 \Rightarrow \{T_n(x)\}_{n \neq m} - \text{с-ма ортон. полиномов}$$

Сел $y(x)$ - четная $\Rightarrow T_n(x)$ имеет n корней на $(-1, 1)$, разных и веществ.

$$2) y_n = 0: \cos(n \arccos x) = 0,$$

$$n \arccos x = -\frac{\pi}{2} + \pi m,$$

$$\arccos x = \frac{(2m-1)\pi}{2n}.$$

$$0 \leq \arccos x \leq \pi \Rightarrow m = \overline{1, n}; \text{ корни:}$$

$$x_m = \cos\left(\frac{2m-1}{2n}\pi\right), m = \overline{1, n}$$

3) Макс полинома Чебышева

$$\max |T_n(x)| = 1$$

$$|\cos(n \arccos x)| = 1 \Leftrightarrow n \arccos x = \pi m$$

$$\Leftrightarrow \arccos x = \frac{\pi m}{n}, m = \overline{0, n} \left(\frac{\pi m}{n} \in [0; \pi] \right)$$

$$\left[\begin{array}{l} \max |T_n(x)| \text{ достигается в } m. x_m = \cos \frac{\pi m}{n} \\ T_n(x_m) = (-1)^m \end{array} \right]$$

4) Введем полином $\overline{T}_n(x) = \frac{T_n(x)}{2^{n-1}}$, коэфф.

при старш. степени = 1

$\nabla \quad \overline{T}_n(x) = \frac{T_n'(x)}{2^{n-1}}$ наименее уклоняется от 0 на $[-1, 1]$ среди всех полиномов степени n : $P_n(x)$, таких: коэфф. при ст. степени = 1.

▲ Легко видеть, что $\max_{[-1, 1]} |\overline{T}_n(x)| \leq \max_{[-1, 1]} |P_n(x)|$

□ Это не так:

$$\max_{[-1, 1]} |\overline{T}_n(x)| > \max_{[-1, 1]} |P_n(x)|$$

$$\max_{[-1, 1]} |\overline{T}_n(x)| = \frac{1}{2^{n-1}} > \max_{[-1, 1]} |P_n(x)|$$

$\overline{T}_n(x) - P_n(x) = Q_{n-1}(x)$ — полином степ. $(n-1)$

≠ разность $\overline{T}_n(x_m) - P_n(x_m)$, где $x_m = \cos \frac{\pi m}{n}$ — экстремумы $T_n(x)$;

$\Rightarrow \frac{(-1)^m}{2^{n-1}} - P_n(x_m) = \begin{cases} > 0, & m \text{ — четное,} \\ < 0, & m \text{ — нечетное, } m = \overline{0, n} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow$, т.е. полином $Q_{n-1}(x)$ меняет знак $(n+1)$ раз $\Rightarrow Q_{n-1}(x)$ имеет (n) корней $\Rightarrow$!?

Глава 3. Численное дифференцирование

$f(x)$ задана или вычисл. в некот. $x_0, x_1, \dots, x_n$. Задача: научиться вычисл. производ. от этой ф-ции.

$$1) f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n) \Rightarrow f'(x_n) - ? \text{ } x \text{ - задано}$$

$$2) F'(x) \stackrel{\text{например}}{=} \text{интерполяц. многочлен } (f(x_1), f(x_n)) \Rightarrow f'(x) \sim F'(x)$$

П.1 Конечнo-разностная аппроксимация

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad // \text{ по опр-нию}$$

$$x_0, x_1, x_2, \dots; \quad x_1 = x_0 + h; \quad x_2 = x_0 + 2h$$

$$\text{Значение в т. } x_1: f'(x_1) \sim \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{h}. \text{ Но какова точность?}$$

$$\text{При каком выборе } x \text{ рав-во } \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h} = f'(x) \text{ верно?}$$

$$\text{По Т ЛAGRANGE: } \exists x: f(x_1 + h) - f(x_1) = f'(x)h, \quad x \in (x_1, x_1 + h)$$

Давайте поймем д/полиномов каких степеней это верно. (* д/полиномов разл. степеней: $n = 0, 1, 2, \dots$.)

$$1) f(x) = 1 \Rightarrow x - \forall$$

$$2) f(x) = x; \quad x_1 + h - x_1 = h \cdot 1 \Rightarrow h = h, \quad \forall x$$

$$3) f(x) = x^2: \quad x_1^2 + 2x_1h + h^2 - x_1^2 = h \cdot 2x,$$

$$2x_1 + h = 2x \Leftrightarrow x = x_1 + \frac{h}{2} = x_1 + \frac{x_2 - x_1}{2} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Степени 0, 2 будут точными, if $x = x_1 + \frac{h}{2}$

$$x_0, x_1, x_2, \dots; f(x_0) = f_0, f(x_1) = f_1, f(x_2) = f_2$$

$$x_i = x_0 + ih, i \in \mathbb{Z}$$

$$f'(x_1) \sim \frac{f_2 - f_1}{h} = f_{\bar{x}} \quad // \text{примен. вперед}$$

$$f'(x_1) \sim \frac{f_1 - f_0}{h} = f_{\bar{x}} \quad // \text{---} // \text{--- назад}$$

$$f'(x_1) = \frac{f_2 - f_0}{2h} = f_{\bar{x}} = \frac{1}{2}(f_x + f_{\bar{x}}) \quad // \text{---} // \text{--- центр.$$

Пореш-ть аппрокс: $\psi = \frac{df}{dx}(x_1) - \frac{f(x_2) - f(x_1)}{h}$

$$= f'(x_1) - \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h} = f'(x_1) -$$

$$- \frac{f(x_1) + hf'(x_1) + \frac{h^2}{2}f''(\xi_1) - f(x_1)}{h} =$$

$$= -\frac{h}{2}f''(\xi_1)$$

$$f_x: \text{пореш-ть аппр.} = \underline{\underline{O(h)}}$$

$$f_{\bar{x}}: \text{пореш-ть аппр.} = \frac{h}{2}f''(\xi_2), \underline{\underline{O(h)}}$$

$$f_{\bar{x}0}: \psi = \underline{\underline{O(h^2)}}$$

Это верно г/гост. значений $f (\exists f'', f''')$